

30/11

RDM

Introduction

La RDM ?

- science du dimensionnement
- partie intégrante de la mécanique des milieux continus
- permet l'étude de comportement global d'une structure

Hyp courantes :

Le matériau est supposé :

⇒ répond à la loi de Hooke

* élastique

* homogène

* isotrope

m propriété des
toutes les directions

* linéaire

On considère un pb en petit déplacements et on néglige les effets dynamiques.

Rappels et généralités

I Les torseurs

On se place par la suite ds un espace affine euclidien E

Soit un solide (S) soumis à des actions mécaniques de 2 types :

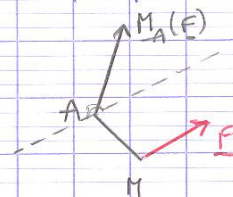
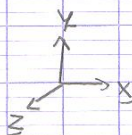
- * actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, électrique...)
- * Actions mécaniques de contact (liaisons mécaniques...)

1) Rappels

1.1) Propriétés des moments

On appelle moment par rapport au point A de la force F appliquée au point M , le pseudovecteur d'origine A défini par la relation :

$$\underline{M}_A(F) = \underline{AM} \wedge \underline{F}$$



La relation de Chasles nous permet de lier directement le moment d'une force appliquée en 2 points quelconques de l'espace.

$$\underline{M}_B(\underline{F}) = \underline{M}_A(\underline{F}) + \underline{BA} \wedge \underline{F}$$

BABAR

1-2) Champ de vecteurs

a)

voir poly - champ discret
- champ continu $f(p)dv, f(p)ds, f(p)dL$

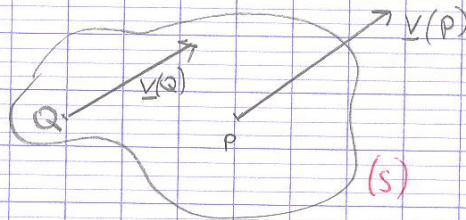
b) Champ des vitesses

On considère le champ continu des vitesses d'un solide (S)

Ds le cas d'un solide indéformable on a :

$$\underline{V}(P) - \underline{V}(Q) - \underline{PQ} \wedge \underline{\omega} = 0 \quad \forall (P, Q) \in S^2$$

Le champ des vitesses d'un solide indéformable est équiprojectif.



c) Champs de moments d'un champ de force

C'est un champ continu qui s'écrit pour un point $A \in E$.

$$\begin{cases} \underline{dI}(A) = \sum \underline{AP}_i \wedge \underline{F}_i \\ \underline{dI}(A) = \int_V \underline{AP} \wedge \underline{f} dV \end{cases} \quad \text{et ainsi} \quad \underline{I}(S) = \underline{I}(A) + \underline{BA} \wedge \underline{R}$$

1-3) Def d'un torseur

On appelle torseur \mathcal{T} tout champ de vecteurs équiprojectif

$$\mathcal{T} = \left\{ \frac{R}{dP} \right\}_P$$

R : résultante génératrice du torseur \mathcal{T}

dP : moment en P du torseur \mathcal{T}

En projetant, résultante et moment sur une base orthonormée B .

$$\gamma = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{P,B}$$

centre de réduction

base de projection

où X, Y, Z sont les composantes de la résultante et L, M, N les composantes du moment.

1-4) Torseurs usuels en mécanique

Il existe 4 principaux torseurs utilisés en mécanique du solide indéformable :

a) Torseurs cinématiques

Soit R un référentiel Galiléen, le champ des vecteurs vitesses des points d'un solide (S) est représenté par le torseur :

$$\gamma_{vp} = \begin{Bmatrix} \underline{\Omega}(S/R) \\ \underline{V}(P/R) \end{Bmatrix}$$

← vecteur rotation instantanée de (S) ds R
 ← vitesse d'un point P du solide (S) ds R

b) Torseurs cinétiques

Soit (S) un solide indéformable de masse $M = \int dm$

$$\gamma_{Lp} = \begin{Bmatrix} \underline{P}(S/R) \\ \underline{L}_p(S/R) \end{Bmatrix}$$

← quantité du mvmt du solide (S)
 ← moment cinétique en un point (P) de (S)

Rapports : $\underline{P}(S/R) = \int_S \underline{V}(p \in S/R) dm = m \underline{V}(G/R)$ (G centre d'inertie de S)
 $\underline{L}_A(S/R) = \int_S \underline{AP} \wedge \underline{V}(p \in S/R) dm(p)$

c) Torseurs dynamiques

Soit $\underline{\gamma}(P/R)$ l'accélération du point P du solide (S) ds R .

$$\gamma_{DA} = \begin{Bmatrix} \underline{D}(S/R) \\ \underline{S}_A(S/R) \end{Bmatrix}$$

← résultante dynamique
 ← moment dynamique au point A

Rappels : $\underline{D} = \int_S dm \underline{x}(P|R)$
 $\underline{S}_A = \int_S \underline{AP} dm \underline{x}(P|R)$

d) Torseurs d'action mécanique :

Les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur un solide indéformable (S) sont représentées par le torseur mécanique :

$$\underline{T}_{eA} = \begin{cases} \underline{F}_{ext \rightarrow S} \leftarrow & \text{forces extérieures qui s'exercent sur (S)} \\ \underline{d}_{/A}^{ext \rightarrow S} \leftarrow & \text{moment des forces extérieures au point A} \end{cases}$$

1-5) Principe fondamentale de la statique

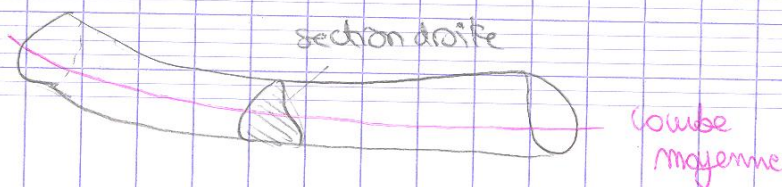
VAES $\underline{T}_{eA} = 0$

II Géométrie des poutres

1) Description :

Poutre : solide engendré par des surfaces, appelées "sections droites" qui ont les propriétés suivantes :

- les centres de gravité des sections forment une courbe appelée ligne moyenne dont le rayon de courbure est grand devant sa longueur.
- les sections sont \perp à la ligne moyenne, elles varient de manière continue et "lente" en fonction de l'abscisse curviligne s de G .
- la dimension des sections est petite devant la longueur de la ligne moyenne.
- les matériaux utilisés sont homogènes, isotropes et subissent une loi de comportement linéaire.



30/11

2) Limite de validité du modèle d'élasticité

- Les accidents de forme (gorges, rainures, épaulements, ...) engendrent des phénomènes appelés concentrations de contrainte. Pour tenir compte de ces discontinuités on utilise des coeff de concentration de contrainte k au kt lors des calculs.
- Pièces massives ou de formes complexes ne peuvent plus être assimilées à des poutres \rightarrow recours théorie de calculs par éléments finis
Modèle divisé en n nb finis d'éléments de forme géométrique simple
Réalisation d'un "maillage".

3) Caractéristiques de la ligne moyenne

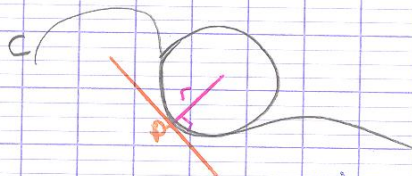
- La ligne moyenne sera repérée au moyen de l'abscisse curviligne ds
- Si on le déplace en un point s quelconque, l'arc est paramétré par l'abscisse curviligne, le vecteur dérivé en s est unitaire et tangent à la courbe, il est dirigé dans le sens du mouvement et porte le nom de vecteur tangent unitaire à la courbe: $T(s)$

$$T(s) = \frac{df}{ds}$$

Le vecteur normal unitaire $N(s)$ complète $T(s)$ en une base orthonormée directe, appelée base de Frénet.

- Le repère de Frénet est un outil d'étude du comportement local des courbes. \rightarrow repère local associé à 1 pt P , décrivant 1 courbe C

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & -T \\ 0 & T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$



- ds le cas présent on a une courbure au sens de Frénet $\gamma = \frac{1}{R(p)}$
et une torsion $T = \frac{1}{T(p)}$

$|p| \rightarrow p^{\text{relet}} \text{ indice}$

4) Caractéristiques de la section droite

- Aires et moment statiques pondérés cf p. 249
- le moment quadratique est une grandeur qui caractérise la géométrie d'une section et se définit par rapport à un axe ou un point.
- Moment quadratique de la section S par rapport à l'axe Ox
$$I_x = \int_S y^2 ds = \iint y^2 dx dy$$
- Moment quadratique de la section S par rapport à l'axe Oy
$$I_y = \int_S x^2 ds = \iint x^2 dx dy$$
- Moment quadratique (polaire) de S par rapport au point O :
$$I_o = \int_S r^2 ds = \iint r^2 dx dy$$

Formule de transport

Le moment quadratique d'une section S dont le barycentre passe par un axe Δ parallèle à un axe de référence Δ à une distance d vaut d'après le théorème de transport de Huy

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + S \cdot d^2$$

Ceci exprime que le moment quadratique est égal à la somme du "moment propre", I_{Δ} et du moment de translation $S \cdot d^2$

III Statique des poutres

1) Principe de Saint Venant

Les résultats obtenus par un calcul de Rdt sur 1 poutre ne sont valables qu'à une distance suffisamment éloignée de la région

d'application des actions mécaniques extérieures concentrées et des liaisons.

3) Efforts extérieurs

Ces forces extérieures peuvent être

- concentrées
- réparties de façon continue
- issues de liaisons parfaites

appui simple



Articulation



encastrement



4) Efforts intérieurs

Soit S un solide en équilibre sous l'action de 2 forces

Pour faire apparaître les efforts intérieurs \rightarrow coupe fictive de ce solide

Soit G le centre de gravité de la section.



partie " S^- " à gauche de la section

partie " S^+ " à droite "

On isole la partie " S^- " l'application du PFS conduit à

$$F_i "S^+ \rightarrow S^- " = - A (ext \rightarrow S)$$

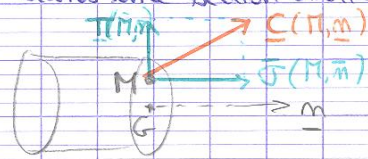
$$\Rightarrow F_i "S^+ \rightarrow S^- " = B (ext \rightarrow S)$$

	Actions mécaniques	Sollicitation	contrainte
N	effet normal	traction / compression	normale
T_y T_z	Effort tranchant	Cisaillement	tangentielle
M_t	Moment de torsion	Torsion	tangentielle
M_y M_z	Moment de flexion	Flexion	contrainte normale

5) Notions de contraintes :

On définit la contrainte en un pt M dans une section droite

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{M}, \underline{m}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{dF}{ds}$$



La contrainte est projetée :

- sur \underline{m} pour donner la **contrainte normale** σ
- ds le plan de coupe \underline{p} pour donner la **contrainte tangentielle** ou le **cisaillement** τ .

6) Sollicitations simples

Si le tenseur de cohésion ne fait apparaître qu'une seule de ses composantes (ou si une de ses composantes est très supérieure aux autres) on a une **SOLLICITATION SIMPLE** :

Rappels :

• Traction : $\underline{\underline{T}}_{coh} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

* contrainte normale $\sigma = \frac{N}{S}$

σ : contrainte normale
en Mpa ou en N/mm^2
 N : effort normal en N
 S : aire de la sect° droite
en mm^2

* déformation $\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$

L_0 : longueur initiale poutre (mm)
 L : " poutre après déformation
 $\Delta L = L - L_0$

ϵ : allongement relatif de la poutre
(sans unité)

• Cisaillement $\underline{\underline{T}}_{coh} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \tau_y & 0 \\ \tau_z & 0 \end{Bmatrix}$

Etude des poutres droites

I. Flexion des poutres droites

Hyp:

1. L'effort tranchant est nul

La flexion simple est dite flexion pure

2. $M_f = M$ moment de flexion M_f ne comporte qu'une composante perpendiculaire au plan Gxy appelé plan de flexion

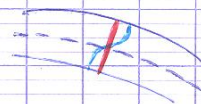
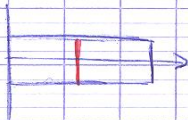
3. La fibre moyenne de la poutre constitue une droite, confondue avec l'axe Gx .

Flexion pure: le moment de flexion est constant le long de x .

Hyp: déformat° de la section

hyp de Bernoulli: une section plane avant déformation reste plane après déformation.

On néglige le cisaillement avec Bernoulli



et un cisaillement

Equations d'équilibre (PFS, au mb de 6)

⇒ plan: 3 équations cf poly

$$\sigma = k y$$

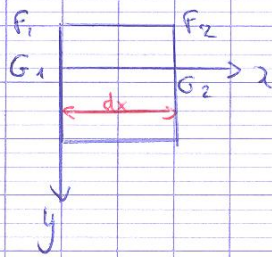
$$M = \int_f \sigma y dF = k \int_f y^2 dF$$

$$I_z = I = \int_f y^2 dF$$

$$\sigma = k y$$

$$\sigma = \frac{y M}{I}$$

Poutre droite - déformation



On connaît $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ $\sigma = \frac{yM}{I}$

causure: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

$$dx = \rho d\sigma \quad \frac{d\sigma}{dx} = \frac{M}{EI} \quad \left\{ \begin{array}{l} dx = \rho d\sigma \\ E dx = \frac{\sigma}{\epsilon} dx = \frac{yM}{EI} dx \\ E dx = y d\sigma \end{array} \right.$$

Exemple

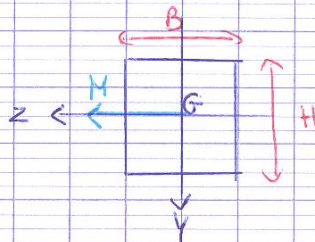
Calcul de contraintes d'une section d'une poutre rectangulaire

$H = 6 \text{ cm}$

$B = 4 \text{ cm}$

Matériau: acier

$M = 5000 \text{ Nm}$



$I = \frac{BH^3}{12}$

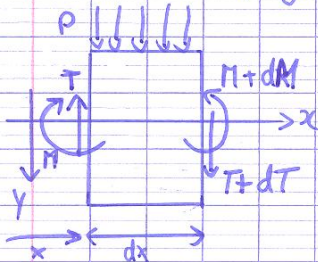
$\sigma = \frac{My}{I} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M y_{\max}}{I} = \frac{M}{W_1} = 208 \text{ MPa}$

$\sigma_{\min} = -\frac{M y_{\min}}{I} = -\frac{M}{W_2} = -208 \text{ MPa}$

$dM = 0$
Flexion nulle

Contraintes tangentielles en flexion simple

Quand le moment de flexion varie le long de la poutre
Il s'accompagne d'un effort tranchant.



équilibre $-T + p dx + (T + dT) = 0$

$-M - T dx + p dx \frac{dx}{2} + (M + dM) = 0$

$p = -\frac{dT}{dx}$

$T = \frac{dM}{dx}$

\Rightarrow L'effort tranchant provoque des contraintes tangentielles dans la section.

dM non nul !

II Torsion des poutres droites

★

La section normale F d'un solide travaille à la torsion simple qd le torseur des efforts intérieurs se réduit au moment de torsion M_t perpendiculaire à F .

Equations d'équilibre ds le plan (yz)

$$\begin{array}{l} 0 = \iint_F \sigma dF \\ 0 = \iint_F T_y dF \\ 0 = \iint_F T_z dF \end{array} \quad \begin{array}{l} M_t = \iint_F (T_z y - T_y z) dF \\ 0 = \iint_F \sigma_z dF \\ 0 = -\iint_F \sigma_y dF \end{array} \quad T = kr$$

cisaillement

Torsion circulaire

$$\begin{aligned} z &= r \sin \theta \\ y &= r \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_y &= -T \sin \theta = -kr \sin \theta \\ T_z &= T \cos \theta = kr \cos \theta \\ T &= rk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -k \iint_F r \sin \theta dF = -k \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \\ 0 &= k \iint_F r \cos \theta dF = k \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_F T_y dF \\ 0 &= \iint_F T_z dF \end{aligned}$$

★

Moment:

$$M_t = \iint_F (T_z y - T_y z) dF$$

$$\Rightarrow M_t = k \iint_F r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dF = k \iint_F r^2 dF$$

$$I_p = \iint_F r^2 dF \quad k = \frac{M_t}{I_p} \quad r = kr$$

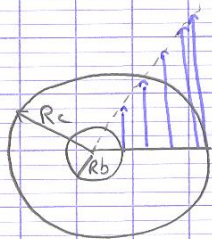
$$\Rightarrow T = \frac{r M_t}{I_p}$$

Torsion, linéaire sur les bords
vient des équats d'équilibre

Démo à ne pas connaître

Cylindres creux

Vide = aucun effort



$$T = kr$$

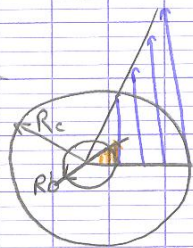
$$I_p = \int_F r^2 dF = \int_{R_b}^{R_c} 2\pi r^3 dr$$

$$I_p = \frac{\pi R_c^4}{2} - \frac{\pi R_b^4}{2}$$

$$T = \frac{rMt}{I_p}$$

Alléger une structure

on insère un gem
matériau d'intérieur
plus léger
effort sur le centre



$$T_2 = \gamma G_2$$

$$T_1 = \gamma G_1$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{G_1}{G_2}$$

A ne pas savoir !

Quand $R_c \sim R_b$

$$I_p \approx 2\pi R_{out}^3$$

$$e = R_c - R_b$$

III Généralisation

1) Equation de la déformée

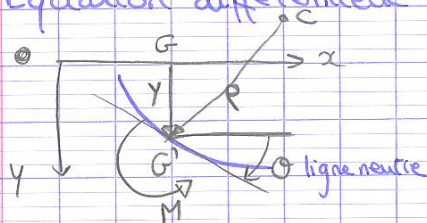


Déviation grande \rightarrow

Déviation minimale, lorsque le p^r C est sur la tangente

Equation différentielle de la déformée

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$



A pas savoir !

Démo : rayon : $\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d\theta}{ds} = \pm \frac{d(\text{Arc tg } y')}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \pm \frac{1}{1+y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dx(1+y'^2)^{1/2}}$

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \pm y''$$

— sous l'hyp des petites déformations

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

\Rightarrow

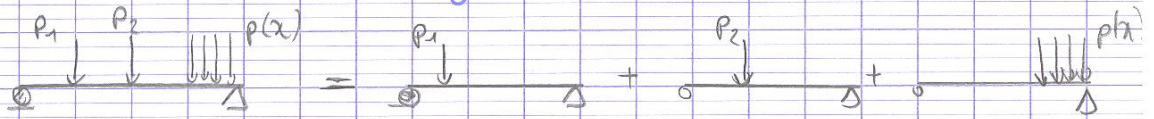
$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

y : la flèche

Principe de superposition des efforts intérieurs

$$M = \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{j=1}^m M_j + \sum_{k=1}^p M_k$$

Applicable à tt type de charges comprenant des forces concentrées

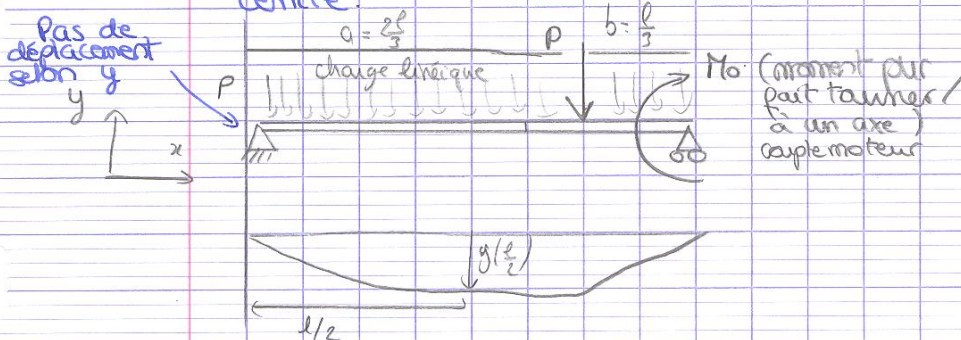


$$M = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{p(x)}$$

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_{P_1}} + \frac{1}{P_{P_2}} + \frac{1}{P_{p(x)}}$$

$$y'' = y''_{P_1} + y''_{P_2} + y''_{p(x)}$$

→ Négliger l'influence de l'effort tranchant et calculer la flèche au centre.



- La déformée due à la charge concentrée: $y_1 = \frac{P}{18EI} \left(\frac{8}{9} l^2 x - x^3 \right)$
- " due à la charge répartie $y_2 = \frac{P}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^3 x)$
- ↳ Moment quadratique
- " provoquée par M_0 $y_3 = \frac{-M_0}{6EI} (l^2 x - x^3)$

→ Charge en 1 pt: moment linéaire

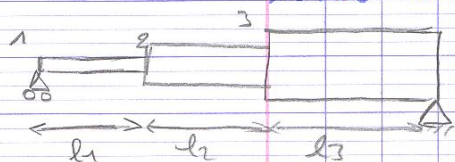
Par le principe de superposition, la flèche au centre de la poutre est:

$$f = y_1\left(\frac{l}{2}\right) + y_2\left(\frac{l}{2}\right) + y_3\left(\frac{l}{2}\right)$$

Somme des déformées
(intégration des y)

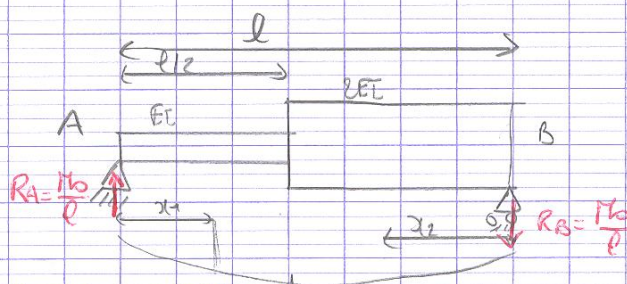
Si la section varie, n'est pas cste, le moment d'inertie est une fonction de la variable x . $y'' = -\frac{M(x)}{EI} \Rightarrow y'' = -\frac{M(x)}{EI(x)}$

Souvent, la section varie de façon discontinue
 L'équation reste valable pour chaque partie avec des conditions aux limites à chaque discontinuité \rightarrow égalité de la déformée
 \rightarrow égalité de la pente



pente = y'

Exemple



* séparer la déformée en 2 pts

* satisfaire les conditions de compatibilité $\rightarrow y' = -\frac{M(x)}{EI(x)}$

1^{er} tronçon $0 < x_1 < l/2$

$$M_1(x_1) = R_A x_1 = \frac{M_0 x_1}{l}$$

$$EI y_1'' = -M_0 \frac{x_1}{l}$$

$$EI y_1 = -M_0 \frac{x_1^3}{6l} + C_1 x_1 + C_2$$

(Contente de droite à gauche)

2nd tronçon $0 < x_2 < l/2$

$$M_2(x_2) = M_0 - R_B x_2 = M_0 \left(1 - \frac{x_2}{l}\right)$$

$$2EI y_2'' = -M_0 \left(1 - \frac{x_2}{l}\right)$$

$$2EI y_2 = -M_0 \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6l}\right) + D_1 x_2 + D_2$$

Conditions aux limites:

$$y_1(x_1=0) = 0 = C_2$$

$$y_2(x_2=0) = 0 = D_2$$

Conditions de compatibilité

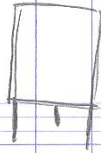
$$y_1\left(x_1 = \frac{l}{2}\right) = y_2\left(x_2 = \frac{l}{2}\right)$$

$$y_1'\left(x_1 = \frac{l}{2}\right) = -y_2'\left(x_2 = \frac{l}{2}\right)$$

axe inversé
(x)

$$C_1 = \frac{M_0 l}{8}$$

$$D_1 = \frac{3M_0 l}{8}$$



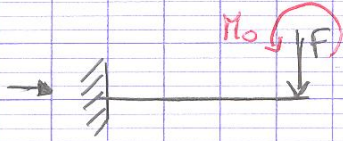
on considère 1 seul pied (car symétrique)

Étude de cas

→ cadre RDM ? longueur pied \gg section

→ efforts extérieurs : • néglige le poids

• 2 liaisons \rightarrow (action du tableau) : Force + Moment
→ encastrement (sol)



→ influence sur le E et le I

→ Effort interne : 1 tronçon

→ calcul de la déformée

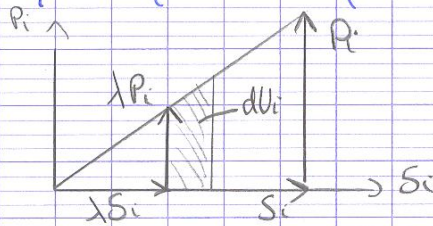
CI : pas de déplacement $y(x,0) = 0$
pas de rotation

* Sollicitations combinées

I- Th. énergétiques et études des instabilités

Formule Clapeyron : $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i$

→ système qui évolue de façon lente et réversible



→ coefficient d'influence : 2 forces dépendantes

Th. Betti-Rayleigh (état général)

→ en 2D : $S_{ij} = S_{ji} \rightarrow a_{ij} = a_{ji}$

